

有向サイクルの二乗グラフの有向全域木について

早稲田大学 基幹理工学部
田中優帆 (Yuuho TANAKA) *

概要

D. J. Kleitman 氏と B. Golden 氏は、1975 年に、行列木定理を使わず、無向サイクルの二乗グラフの頂点数が偶数の場合のみ、平面グラフの位相的性質を使って全域木を数え上げていた。しかし、頂点数が奇数の場合は、同様に全域木の総数を数え上げられることを言及するだけにとどめていた。2024 年には、宗政昭弘氏達が、奇数頂点の場合も含めて、行列木定理を使わずに同様の手法で無向サイクルの二乗グラフの全域木を数え上げることができている。本研究では、その研究を拡張し、有向サイクルの二乗グラフについても、行列木定理を使わず、さらに、頂点数の偶奇に依らずに、有向全域木の総数を数え上げる。

1 はじめに

人間を頂点、関係性を辺と見なすと、社会科学的ネットワークをグラフとして描くことができ、端末を頂点、ケーブルを辺と見なすと、コンピュータネットワークをグラフとして描くことができる。このように様々なネットワークはグラフとして描くことができるため、ネットワークの複雑性を解析するためにグラフが用いられることがしばしばある。そして、グラフの全域木は、ネットワークにおける全ての頂点に接続されているような経路と対応付けられ、ネットワークの複雑性や信頼性を特徴づける重要な指標である [8].

定義 1.1 (全域木). 無向グラフ G に対して、

$$E(G') \subseteq E(G), V(G') = V(G)$$

を満たす G' を G の全域部分グラフであるという。連結グラフ G における全域部分グラフ G' が連結であり、閉路がないグラフであるとき、 G' をグラフ G の全域木という (例: 図 2)。グラフ G の全域木の総数は、 $t(G)$ で表す。

定義 1.2 (有向全域木). 有向グラフ \vec{G} における有向辺の向きを無視してできるグラフが連結であるとき、有向グラフ \vec{G} は弱連結であるといい、有向グラフ \vec{G} に対して、

$$E(\vec{G}') \subseteq E(\vec{G}), V(\vec{G}') = V(\vec{G})$$

を満たす \vec{G}' を \vec{G} の全域部分グラフであるという。弱連結であるグラフ G における全域部分グラフ

* E-mail: tanaka_yuuho@aoni.waseda.jp

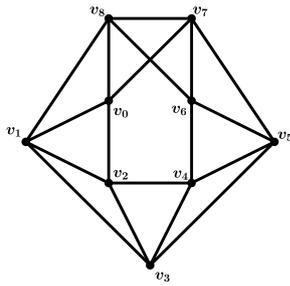


図1 無向グラフ

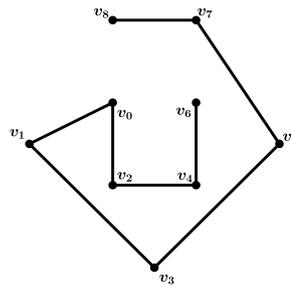


図2 図1の全域木

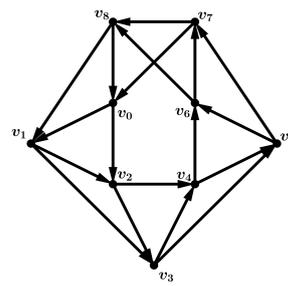


図3 有向グラフ

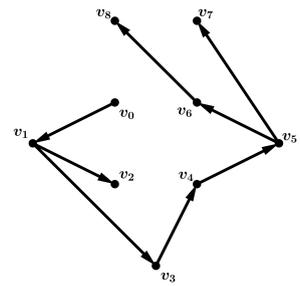


図4 図3の有向全域木

\vec{G}' が弱連結であり、以下を満たすとき、 \vec{G}' を $u \in V(\vec{G}')$ を根としたグラフ \vec{G} の有向全域木という (例：図 4)。

- \vec{G}' は閉路をもたない。
- 任意の頂点 $v \in V(\vec{G}') \setminus \{u\}$ に対して、 $u \in V(\vec{G}')$ からの有向道が存在する。
- 任意の頂点 $v \in V(\vec{G}') \setminus \{u\}$ の入次数は 1 である。

u を根としたグラフ \vec{G} の有向全域木の総数は、 $t(\vec{G}, u)$ で表す。

一般に、連結グラフの全域木の総数は行列木定理 [4, 6, 13] を用いて数え上げることができる。より正確には、グラフのラプラシアン行列の非ゼロ固有値の積をグラフの頂点数で割ったものと、グラフの全域木の総数が一致する。

定義 1.3 (ラプラシアン行列). $G = (V, E)$ をグラフとする。このとき、グラフ G のラプラシアン行列 L_G とは、以下のように定義される。

$$L_G(i, j) = \begin{cases} d(i) & \text{if } i = j, \\ -1 & \text{if } i \neq j, (i, j) \in E, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

ここで、 $d(i)$ は頂点 i が接続している辺の総数である。

定理 1.1 (行列木定理). 無向グラフ G の任意の頂点 u に対して、 L_G の第 u 行と第 u 列を除いた部分行列を $L_G[u]$ とすると、

$$\det L_G[u] = t(G).$$

有向グラフ \vec{G} の任意の頂点 u に対して、 $L_{\vec{G}}$ の第 u 行と第 u 列を除いた部分行列を $L_{\vec{G}}[u]$ とすると、

$$\det L_{\vec{G}}[u] = t(\vec{G}, u).$$

これまで無向巡回グラフ等の全域木の総数の明示的な公式の導出が行われており [7, 9, 10, 15], 有向グラフについても、有向巡回グラフ等の全域木の総数の明示的な公式の導出が行われている [2, 7, 14]. 特に、無向サイクルの二乗グラフ (例：図 5) については、G. Baron 氏らによって行列木定理を用いた全域木の総数の導出が行われている [1].

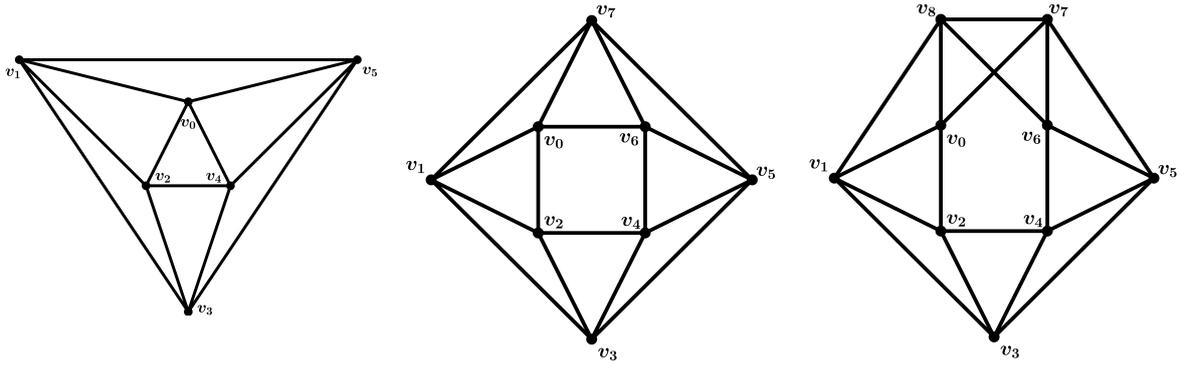


図5 無向サイクルの二乗グラフ

一方で、D. J. Kleitman 氏らは、行列木定理を使わずに無向サイクルの二乗グラフの全域木の総数を数え上げている。具体的には、頂点数が偶数の場合のみ平面グラフの位相的性質を使って全域木を数え上げており、無向サイクルの二乗グラフの全域木の総数を Fibonacci 数列を用いて表していた [3]。しかし、頂点数が奇数の場合は、同様に全域木の総数を数え上げられることを言及するだけにとどめていた。

定義 1.4 (Fibonacci 数列). 漸化式 $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ によって決まる数列 F_n を Fibonacci 数列という。

定理 1.2 (B. Kleitman, D. J. Golden, 1975 [3]).

$$t(C_n^2) = nF_n^2.$$

グラフの全域木の総数は行列木定理を用いることで簡単に求められるが、全域木の構成に関する付加情報は得られない。D. J. Kleitman 氏らの手法を用いると、全域木の構成に関する付加情報を得ながら全域木の総数を数え上げることが可能である。そして、2024 年には、宗政昭弘氏らが、奇数頂点の場合も含めて、行列木定理を使わずに同様の手法で無向サイクルの二乗グラフの全域木を数え上げることができており、無向サイクルの三乗グラフ等にも同様の手法が適用可能であると考えられる [11]。

2 主結果 - 有向サイクルの二乗グラフの有向全域木

既に述べたように、一般に、有向グラフ \vec{G} の頂点 $u \in V(\vec{G})$ を根とした有向全域木の総数も、行列木定理を用いて求めることができるため、有向サイクルの二乗グラフの $v_j \in V(\vec{C}_n^2)$ を根とした有向全域木の総数についても、行列木定理を用いて公式を導出することが可能である。

定義 2.1 (Jacobsthal 数列). 漸化式 $J_0 = 0, J_1 = 1, J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ によって決まる数列 J_n を Jacobsthal 数列という。

定理 2.1. 有向サイクルの二乗グラフ \vec{C}_n^2 に対して頂点 $v_j (v_j \in V(\vec{C}_n^2), j \in \mathbb{Z})$ を根とした有向全域木の総数は、

$$t(\vec{C}_n^2, v_j) = J_n.$$

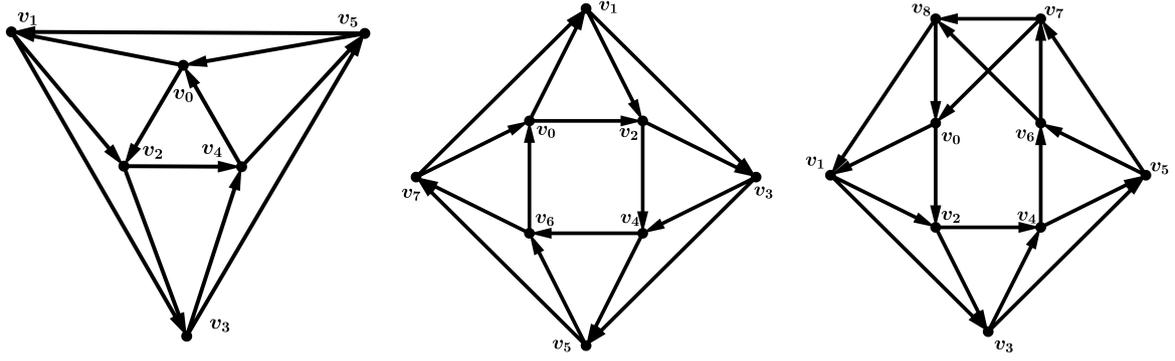


図6 有向サイクルの二乗グラフ

行列木定理を用いると、有向サイクルの二乗グラフ \vec{C}_n^2 の有向全域木の総数の公式は導出できるが、全域木の構成に関する付加情報は得られない。我々は、[11]と同様に、行列木定理を用いず、有向全域木の構成に関する付加情報を得ながら、有向全域木の総数を数え上げた。本節では、その得られた公式およびその計算過程について紹介する。

定義 2.2 (有向サイクルの二乗グラフ). n 頂点有向サイクルの二乗グラフ $\vec{C}_n^2 = (V(\vec{C}_n^2), E(\vec{C}_n^2))$ とは、点集合 $V(\vec{C}_n^2) = \mathbb{Z}_n$ (n 次巡回群), 辺集合 $E(\vec{C}_n^2) = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V(\vec{C}_n^2), i, j \in \mathbb{Z}, j - i = 1, 2\}$ により定義される (例: 図6). ここで, $v_i = i + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_n$ とおく。

次に、記法の準備をいくつか行うことにする。有向サイクルの二乗グラフ \vec{C}_n^2 の辺を

$$e_i = (v_i, v_{i+1}), f_i = (v_i, v_{i+2}) \quad (i \in \mathbb{Z})$$

と表すことにすると、有向サイクルの二乗グラフ \vec{C}_n^2 の辺集合は、

$$E(\vec{C}_n^2) = \{e_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \{f_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

となる。さらに、 $j, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq \lceil \frac{n-2}{2} \rceil$ に対して、

$$ES(n, k, j) = \{f_{j-2}, f_{j+2k-1}\} \cup \{e_{j-1}, e_j, e_{j+1}, \dots, e_{j+2k-1}\}$$

を逃げ道と呼ぶ (例: 図7-10の波線部)。このとき、グラフ $\overrightarrow{S_{n,k,j}}$ を以下のように定義する (例: 図7-10の実線部)。

$$\begin{aligned} V(\overrightarrow{S_{n,k,j}}) &= V(\vec{C}_n^2), \\ E(\overrightarrow{S_{n,k,j}}) &= E(\vec{C}_n^2) \setminus ES(n, k, j). \end{aligned}$$

一般に、頂点 $u \in V(\vec{G})$ を根とした有向グラフ \vec{G} の有向全域木全体の集合を $T_{\vec{G},u}$ とする。したがって、 $t(\vec{G}, u) = |T_{\vec{G},u}|$ となる。

このとき、グラフ $\overrightarrow{S_{n,k,j}}$ の有向全域木の総数と有向ストリップグラフ $\overrightarrow{S_{n-2k}}$ の有向全域木の総数に関する以下の補題が成り立つ。

定義 2.3 (有向ストリップグラフ). $V(\overrightarrow{S_n}) = \{i \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq i \leq n\}$, $E(\overrightarrow{S_n}) = \{(i, j) \mid i, j \in V(\overrightarrow{S_n}), 1 \leq j - i \leq 2\}$ で定義されるグラフ $\overrightarrow{S_n} = (V(\overrightarrow{S_n}), E(\overrightarrow{S_n}))$ を有向ストリップグラフという (例: 図16)。

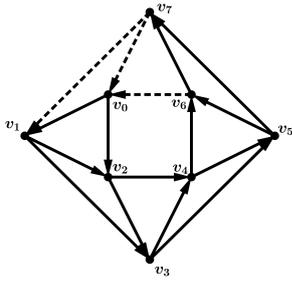


図 7 $n = 8,$
 $k = 0, j = 0$

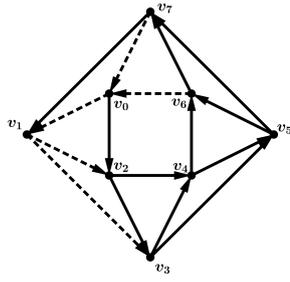


図 8 $n = 8,$
 $k = 1, j = 0$

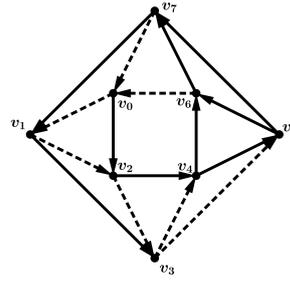


図 9 $n = 8,$
 $k = 2, j = 0$

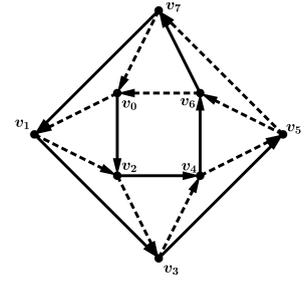


図 10 $n = 8,$
 $k = 3, j = 0$

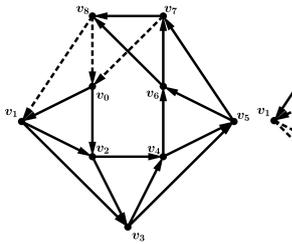


図 11 $n = 9,$
 $k = 0, j = 0$

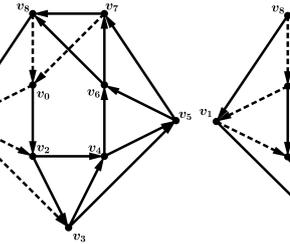


図 12 $n = 9,$
 $k = 1, j = 0$

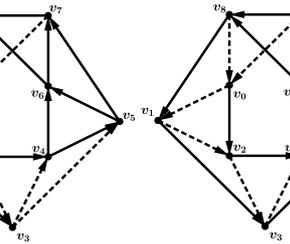


図 13 $n = 9,$
 $k = 2, j = 0$

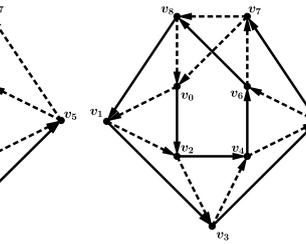


図 14 $n = 9,$
 $k = 3, j = 0$

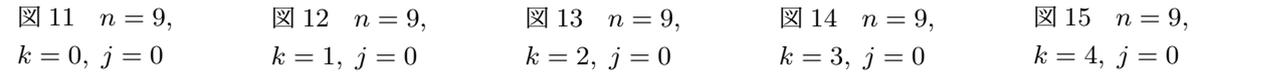


図 15 $n = 9,$
 $k = 4, j = 0$

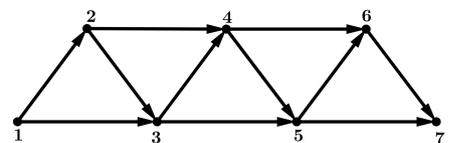
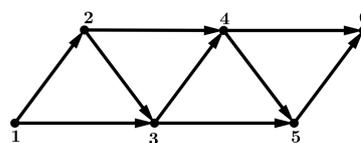
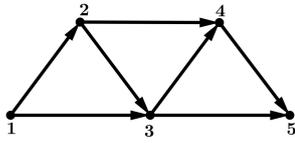


図 16 有向ストリップグラフ

補題 2.1. 任意の $v_j (v_j \in V(\overrightarrow{C}_n^2), j \in \mathbb{Z})$ に対して,

$$t(\overrightarrow{S}_{n,k,j}, v_j) = t(\overrightarrow{S}_{n-2k}, 1) \quad (j, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq \lceil \frac{n-2}{2} \rceil.)$$

特に,

$$T_{\overrightarrow{S}_{n, \lceil \frac{n-2}{2} \rceil, j}, v_j} = \{\overrightarrow{S}_{n, \lceil \frac{n-2}{2} \rceil, j}\}.$$

そして, 有向ストリップグラフ \overrightarrow{S}_n の有向全域木の総数について, 以下の補題が成り立つ.

補題 2.2.

$$t(\overrightarrow{S}_n, 1) = J_{n-2} + J_{n-1}.$$

次に, 有向サイクルの二乗グラフ \overrightarrow{C}_n^2 の有向全域木とグラフ $\overrightarrow{S}_{n,k,j}$ の有向全域木の関係について述べる. 有向サイクルの二乗グラフ \overrightarrow{C}_n^2 に対して,

$$T_i = \{e_i, e_{i+1}, f_i\} \quad (i \in \mathbb{Z})$$

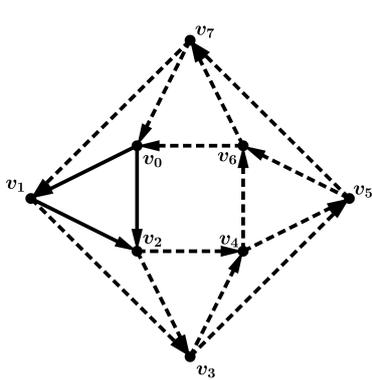


図 17 T_0

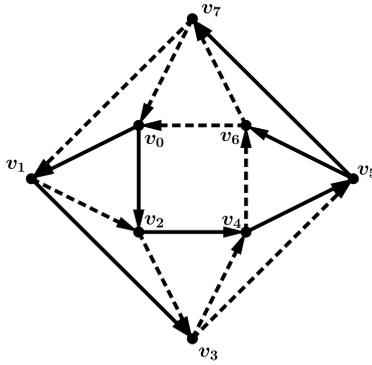


図 18 三角形に関して閉じていない

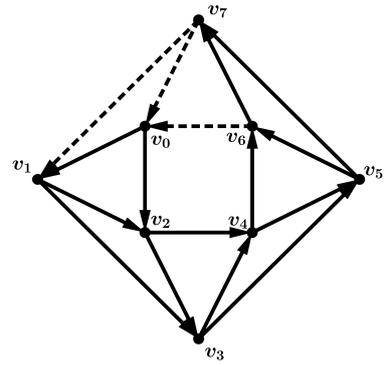


図 19 三角形に関して閉じている

とする (例: 図 17). $i(i \in \mathbb{Z})$ に対して, \vec{C}_n^2 の部分グラフ \vec{G} が,

$$|T_i \cap E(\vec{G})| \text{ または } T_i \subseteq E(\vec{G})$$

を満たすとき, \vec{G} は三角形 T_i に関して閉じているという. 任意の $i(i \in \mathbb{Z})$ に対して, \vec{G} が三角形 T_i に関して閉じているとき, \vec{G} は三角形に関して閉じているという (例: 図 18, 19).

全域木に対して, 三角形に関して閉じるように有向サイクルの二乗グラフ \vec{C}_n^2 の辺を追加していくと, やがて, 以下の定理に現れるグラフになる.

定理 2.2. \vec{G} を三角形に関して閉じている有向サイクルの二乗グラフ \vec{C}_n^2 の弱連結な全域部分グラフとする. このとき, 次のいずれかが成り立つ.

- $E(\vec{G}) = E(\vec{C}_n^2)$.
- ある $k, j(0 \leq j \leq n-1, 0 \leq k \leq \lceil \frac{n-2}{2} \rceil)$ が存在して, $E(\vec{G}) = E(\overrightarrow{S_{n,k,j}})$.
- n は奇数で, $E(\vec{G}) = \{f_{j-1}, f_j, \dots, f_{j+n-2}\}$.

したがって, 有向サイクルの二乗グラフ \vec{C}_n^2 の有向全域木とグラフ $\overrightarrow{S_{n,k,j}}$ の有向全域木について, 以下の定理が成り立つ.

定理 2.3. 任意の $v_j(v_j \in V(\vec{C}_n^2), j \in \mathbb{Z})$ に対して,

$$T_{\vec{C}_n^2, v_j} = \bigcup_{k=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} T_{\overrightarrow{S_{n,k,j}}, v_j} \quad (\text{disjoint}).$$

以上の補題および定理と, 以下の補題 2.3 を用いることで, 定理 2.1 を証明することができる.

補題 2.3 (A. F. Horadam, 1996 [5]).

$$\sum_{k=1}^{n-1} J_k = \frac{1}{2}(J_{n+1} - 1).$$

定理 2.1 の証明

$$\begin{aligned}
t(\overrightarrow{C}_n^2, v_j) &= |T_{\overrightarrow{C}_n^2, v_j}^{\rightarrow}| \\
&= \left| \bigcup_{k=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} T_{\overrightarrow{S}_{n,k,j}, v_j}^{\rightarrow} \right| && \text{(定理 2.3 より)} \\
&= \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} t(\overrightarrow{S}_{n,k,j}, v_j) \\
&= \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} t(\overrightarrow{S}_{n-2k}, 1) && \text{(補題 2.1 より)} \\
&= \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} t(\overrightarrow{S}_{2k+2}, 1) & \text{if } n \text{ は偶数} \\ 1 + \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} t(\overrightarrow{S}_{2k+3}, 1) & \text{if } n \text{ は奇数} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} (J_{2k} + J_{2k+1}) & \text{if } n \text{ は偶数} \\ 1 + \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} (J_{2k+1} + J_{2k+2}) & \text{if } n \text{ は奇数} \end{cases} && \text{(補題 2.2 より)} \\
&= \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} J_k & \text{if } n \text{ は偶数} \\ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} J_k & \text{if } n \text{ は奇数} \end{cases} \\
&= \frac{1}{2}(J_{n+1} - (-1)^n) && \text{(補題 2.3 より)} \\
&= J_n.
\end{aligned}$$

□

3 最後に

本講演では、有向サイクルの二乗グラフを対象とし、有向全域木の構成の付加情報を得られるような手法で有向全域木の総数を数え上げた。なお、本稿の内容は、[12]に基づく。

今後の展望としては、有向サイクルの二乗グラフの有向全域木の総数の公式に現れる Jacobsthal 数列に組合せ論的解釈を与えることが考えられる。さらに、無向サイクルの三乗グラフ等の全域木の総数を同様の手法で数え上げる、二点を同一視した全域木の総数を同様の手法で数え上げる、等も考えられる。

■謝辞 本研究は、科学研究費補助金（課題番号 23KJ2020）の助成を受けている。

参考文献

- [1] G. Baron, H. Prodinger, R. F. Tichy, F. T. Boesch, J. F. Wang. : The number of spanning trees in the square of a cycle, *Fibonacci Quart.* **23**(3) (1985) 258–264.
- [2] X. Chen. : The number of spanning trees in directed circulant graphs with non-fixed jumps, *Discrete Math.* **307** (2007) 1873–1880.

- [3] D. J. Kleitman, B. Golden. : Counting trees in a certain class of graphs, *Amer. Math. Monthly*, **82**(1) (1975) 40–44.
- [4] C. Godsil, G. Royle. : *Algebraic Graph Theory*, Springer, 2001.
- [5] A. F. Horadam. : Jacobsthal representation numbers, *Fibonacci Quart.* **34**(1) (1996) 68–74.
- [6] P. D. Leenheer. : An elementary proof of a matrix tree theorem for directed graphs, *SIAM Rev.* **62** No.3 (2020) 716–726.
- [7] J. Louis. : Spanning trees in directed circulant graphs and cycle power graphs, *Monatsh Math* **182** (2017) 51–63.
- [8] F. Ma, B. Yao. : An iteration method for computing the total number of spanning trees and its applications in graph theory, *Theoretical Computer Science* **708** (2018) 46–57.
- [9] A. D. Mednykh, I. A. Mednykh. : The number of spanning trees in circulant graphs, its arithmetic properties and asymptotic, *Discrete Math.* **342**(6) (2019) 1772–1781.
- [10] A. D. Mednykh, I. A. Mednykh. : On rationality of generating function for the number of spanning trees in circulant graphs, *Algebra Colloq.* **27**(1) (2020) 87–94.
- [11] A. Munemasa, Y. Tanaka. : Convex subgraphs and spanning trees of the square cycles, *Australas. J. Combin.* **88**(2) (2024) 204–211.
- [12] Y. Tanaka. : The spanning trees in the directed square cycles, in preparation.
- [13] W. T. Tutte. : *Graph Theory*, Cambridge University Press, 2001.
- [14] J. M. Wojciechowski, M. Fellows. : Counting spanning trees in directed regular multigraphs, *J. Franklin Inst.* **326** (1989) 889–896.
- [15] X. Yong, T. Acenjian. : The numbers of spanning trees of the cubic cycle C_N^3 and the quadruple cycle C_N^4 , *Discrete Math.* **169** (1997) 293–298.